Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 2

Nun haben wir das zentrale Objekt der linearen Algebra, nämlich die linearen Abbildungen eingeführt. Sie sind die natürliche Verallgemeinerung der reellen Funktionen der Form $f(x) = kx$. (Im eindimensionalen Fall nennt man auch die Funktionen der Form $x \mapsto kx + n$ linear.)

Weiterhin haben wir Matrizen als rechteckige Zahlenschemata definiert. Man kann sie komponentenweise mit einem Skalar multiplizieren und zwei gleich große Matrizen kann man ebenso addieren. Zusätzlich haben wir noch die Multiplikation zweier Matrizen geeigneter Dimensionen (und als Spezialfall die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor) definiert.

Es besteht ein großer Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen und Matrizen. Wie die Zahl k eindeutig die Funktion $x \mapsto kx$ bestimmt, gilt dies auch für Matrizen und linearen Abbildungen zwischen geeigneten Räumen.

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 9. und 10. Mai in den Übungen besprochen.

1. Es sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Zeigen Sie, dass der Kern von A ein Untervektorraum in V und das Bild von A ein Untervektorraum in W ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 14. Mai 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Sind die nachstehenden Abbildungen linear?

(a) $A : \{\text{Polynome mit reellen Koeffizienten}\} \to \mathbb{R}^2, \quad A(p) := \begin{pmatrix} p'(0) \\ p(4) \end{pmatrix},$

(b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ 2z \end{pmatrix},$

(c) $\Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad \Phi(f) := f \circ \exp.$
(Φ ordnet einer beliebigen glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(e^x)$ zu.)

2. Es seien U und V Vektorräume, $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ eine Basis von U und $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ beliebige Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $A : U \to V$ existiert, so dass

$$A\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{w}_i \quad \text{für jedes } i = 1, \ldots, n.$$

3. Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \; A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_4 := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ihre Transponierten und alle wohldefinierten Produkte A_iA_j, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ (es darf $i = j$ sein).

4. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement

(a) des Unterraums $U := \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(b) des Unterraums $V := \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^4$.